في مفكوك $(س^{٣} + \frac{٥}{س})^{٨}$ ، أوجد :

(أولاً) قيمة الحد الأوسط .

(ثانيًا) رتبة الحد الخالى من س فى هذا المفكوك .

(ثالثًا) إذا كانت النسبة بين الحد الأوسط والحد السابق له كنسبة ١ : ١٠٠

فأوجد قيمة س .

الحل

(أولاً) ∵ $ن = ٨$ ∴ عدد حدود المفكوك = ٩

∵ ترتيب الحد الأوسط = $\frac{٨}{٢} + ١ = ٥$

∴ الحـــــد الأوســـط = $ح_{٥} = {}^{٨}و_{٤} (\frac{٥}{س})^{٤} (س^{٣})^{٨-٤}$

$= {}^{٨}و_{٤} \times ٥^{٤} \times س^{-٤} \times س^{١٢}$

$= ٧٠ \times ٦٢٥ \, س^{٨} = ٤٣٧٥٠ \, س^{٨}$

(ثانيًا) ∵ $ح_{ر+١} = {}^{ن}و_{ر} (\text{الثانى})^{ر} (\text{الأول})^{ن-ر}$

$= {}^{٨}و_{ر} (\frac{٥}{س})^{ر} (س^{٣})^{٨-ر} = {}^{٨}و_{ر} (٥)^{ر} \times س^{-ر} \times س^{٢٤-٣ر}$

∵ $س^{٠} = س^{٢٤-٤ر}$ ∴ $٢٤ - ٤ر = ٠$ ∴ $ر = ٦$

∴ الحد الخالى من س هو $ح_{٧}$

$ح_{٧} = {}^{٨}و_{٦} (٥)^{٦} = {}^{٨}و_{٢} (٥)^{٦} = ٢٨ \times ٥^{٦} = ٤٣٧٥٠٠$

(ثالثًا) ∵ $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{الثانى}}{\text{الأول}}$ ∴ $\frac{ح_{٥}}{ح_{٤}} = \frac{٨ - ٤ + ١}{٤} \times \frac{٥}{س^{٤}} = \frac{٢٥}{٤ س^{٤}}$

∵ $\frac{ح_{٥}}{ح_{٤}} = \frac{١}{١٠٠}$ ∴ $\frac{٢٥}{٤ س^{٤}} = \frac{١}{١٠٠}$

∴ $س^{٤} = ٦٢٥$ ∴ $س = \pm ٥$

فى مفكوك (١ + ٢ س)$^{\text{ح}}$ ، إذا كان : ع$_{٣}$ = ٨٤ س^{٢} ، ع$_{٥}$ = ٥٦٠
فأوجد قيمة كل من ح ، س .

الحل

∵ ع$_{ر+١}$ = $^{\text{ح}}$و$_{ر}$ (الثانى)^{ر} (الأول)$^{\text{ح}-ر}$

∴ ع$_{٣}$ = $^{\text{ح}}$و$_{٢}$ (٢ س)^{٢} × ١ ∵ ع$_{٣}$ = ٨٤ س^{٢}

∴ ٨٤ س^{٢} = $^{\text{ح}}$و$_{٢}$ × ٤ س^{٢} (بقسمة طرفى المعادلة على ٤ س^{٢})

∴ $^{\text{ح}}$و$_{٢}$ = ٢١ ∵ $^{\text{ح}}$و$_{٢}$ = $\frac{^{\text{ح}}\text{ل}_{٢}}{\lfloor ٢}$

∴ $^{\text{ح}}$ل$_{٢}$ = ٢١ ⌊ ٢ = ٤٢ = ٧ × ٦ ∴ $^{\text{ح}}$ل$_{٢}$ = ^{٧}ل$_{٢}$ ∴ ح = ٧

∵ ع$_{٥}$ = ^{٧}و$_{٤}$ (٢ س)^{٤} ، ع$_{٥}$ = ٥٦٠

∴ ٥٦٠ = ^{٧}و$_{٣}$ × ١٦ س^{٤} (بقسمة طرفى المعادلة على ١٦)

∴ ^{٧}و$_{٣}$ س^{٤} = ٣٥ ∴ ٣٥ س^{٤} = ٣٥

∴ س^{٤} = ١ ∴ س = ± ١

أوجد معامل الحد الذى يشتمل على س^{٩} فى مفكوك س^{٥} (٢ س + $\frac{١}{٢\text{س}}$)^{١٠}

الحل

∵ ع$_{ر+١}$ = $^{\text{ح}}$و$_{ر}$ (الثانى)^{ر} (الأول)$^{\text{ح}-ر}$

∴ ع$_{ر+١}$ = س^{٥} × ^{١٠}و$_{ر}$ ($\frac{١}{٢\text{س}}$)^{ر} (٢ س)$^{١٠-ر}$

∴ ع$_{ر+١}$ = ^{١٠}و$_{ر}$ (٢)$^{١٠-٢ر}$ × س$^{١٥-٢ر}$

∵ س^{٩} = س$^{١٥-٢ر}$ ∴ ٩ = ١٥ − ٢ ر ∴ ر = ٣

الحد المشتمل على س^{٩} هو الحد الرابع

معامل ع$_{٤}$ = ^{١٠}و$_{٣}$ (٢)^{٤} = ١٢٠ × ١٦ = ١٩٢٠

فى مفكوك $(٢س + \frac{٣}{س^{٢}})^{ن}$ ، إذا كان : $ع_{٩} = ع_{١٠}$ ، والنسبة بين $ع_{١١}$: $ع_{١٢}$ كنسبة ٢٢ : ١٥ ، فأوجد قيمة ن ، ثم أثبت أنه لا يوجد حد خالٍ من س فى هذا المفكوك .

الحل

$\because ع_{٩} = ع_{١٠}$ $\therefore \frac{ع_{١٠}}{ع_{٩}} = ١$

$\because \frac{ع_{ر+١}}{ع_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{الثانى}}{\text{الأول}}$ $\therefore \frac{ن - ⑨ + ١}{⑨} \times \frac{٣}{٢س^{٣}} = ١$

$\therefore ن - ٨ = ٦س^{٣}$ ..... ①

$\because \frac{ع_{١٢}}{ع_{١١}} = \frac{ن - ⑪ + ١}{⑪} \times \frac{٣}{٢س^{٣}} = \frac{٣(ن - ١٠)}{٢٢س^{٣}}$ $\because \frac{ع_{١٢}}{ع_{١١}} = \frac{١٥}{٢٢}$

$\therefore \frac{٣(ن - ١٠)}{٢٢س^{٣}} = \frac{١٥}{٢٢}$ $\therefore ن - ١٠ = ٥س^{٣}$ ..... ②

بقسمة ① على ② : $\therefore \frac{ن - ٨}{ن - ١٠} = \frac{٦}{٥}$ $\therefore ٥(ن - ٨) = ٦(ن - ١٠)$

$\therefore ٥ن - ٤٠ = ٦ن - ٦٠$ $\therefore ن = ٢٠$

لإثبات أنه لا يوجد حد خالٍ من س نوجد :

$ع_{ر+١} = ن\text{ق}_{ر}$ (الثانى)^{ر} (الأول)$^{ن-ر}$

$\because ع_{ر+١} = ٢٠\text{ق}_{ر}(\frac{٣}{س^{٢}})^{ر}(٢س)^{٢٠-ر}$

$= ٢٠\text{ق}_{ر}(٣)^{ر}(٢)^{٢٠-ر} \times س^{٢٠-٣ر}$

$\because س^{٠} = س^{٢٠-٣ر}$ $\therefore ر = \frac{٢٠}{٣} = ٦\frac{٢}{٣}$

$\because ر \ni ص_{+}$ $\therefore$ لا يوجد حد خالٍ من س

فى مفكوك (س^{٢} + $\frac{١}{س}$)^{ن} ، إذا كان : معامل ع$_{٥}$ = معامل ع$_{١١}$ ،
والحد الخامس يساوى أربعة أمثال الحد السادس ، فأوجد قيمة ن ، س .

الحل

∵ معامل ع$_{٥}$ = ^{ن}و$_{٤}$ ، معامل ع$_{١١}$ = ^{ن}و$_{١٠}$

∵ معامل ع$_{٥}$ = معامل ع$_{١١}$ ∴ ^{ن}و$_{٤}$ = ^{ن}و$_{١٠}$ ∴ ن = ١٤

∵ ع$_{٥}$ = ٤ ع$_{٦}$ ∴ $\frac{ع_{٦}}{ع_{٥}} = \frac{١}{٤}$ ..... ①

∵ $\frac{ع_{ر+١}}{ع_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{الثانى}}{\text{الأول}}$ ∴ $\frac{١}{٤} = \frac{١}{س^{٣}} \times \frac{١٤ - ⑤ + ١}{⑤}$

∴ $\frac{٢}{س^{٣}} = \frac{١}{٤}$ ∴ س^{٣} = ٨ ∴ س = ٢

إذا كانت : (ا – س)^{١٤} = ح$_{٠}$ + ح$_{١}$ س + ح$_{٢}$ س^{٢} + ح$_{٣}$ س^{٣} + ... + ح$_{١٤}$ س^{١٤}
وكـــان : ٤ ح$_{٤}$ + ١١ (ح$_{٣}$ + ح$_{٢}$) = صفر ، فأوجد قيمة ا .

الحل

∵ (ا–س)^{١٤} = ا^{١٤} – ^{١٤}و$_{١}$ ا^{١٣} س + ^{١٤}و$_{٢}$ ا^{١٢} س^{٢} – ^{١٤}و$_{٣}$ ا^{١١} س^{٣} + ^{١٤}و$_{٤}$ ا^{١٠} س^{٤} – .....

وبالمقارنة نجد أن : ح$_{٢}$ = ^{١٤}و$_{٢}$ ا^{١٢} ، ح$_{٣}$ = – ^{١٤}و$_{٣}$ ا^{١١} ، ح$_{٤}$ = ^{١٤}و$_{٤}$ ا^{١٠}

∵ ٤ ح$_{٤}$ + ١١ (ح$_{٣}$ + ح$_{٢}$) = ٠

∴ ٤ × ^{١٤}و$_{٤}$ ا^{١٠} + ١١ (– ^{١٤}و$_{٣}$ ا^{١١} + ^{١٤}و$_{٢}$ ا^{١٢}) = ٠

بقسمة طرفى المعادلة على ^{١٤}و$_{٣}$ × ا^{١٠}

∴ ٤ × $\frac{^{١٤}و_{٤}}{^{١٤}و_{٣}}$ + ١١ (– ا + $\frac{^{١٤}و_{٢}}{^{١٤}و_{٣}}$ × ا^{٢}) = ٠

∴ ٤ × $\frac{١٤ - ٣}{٤}$ + ١١ (– ا + $\frac{٣}{١٤ - ٢}$ × ا^{٢}) = ٠

∴ ١١ + ١١ (– ا + $\frac{١}{٤}$ ا^{٢}) = ٠ (بقسمة طرفى المعادلة على ١١)

∴ ١ – ا + $\frac{١}{٤}$ ا^{٢} = ٠ ∴ (١ – $\frac{١}{٢}$ ا)^{٢} = ٠ ∴ ا = ٢

إذا كان : $(٢س + ١)^{٥} = أ + ب س + حـ س^{٢} + ء س^{٣} + هـ س^{٤} + و س^{٥}$

فأوجد قيمة : $أ + ب + حـ + ء + هـ + و$

الحل

بوضع $س = ١$

$\therefore أ + ب + حـ + ء + هـ + و = (٢ \times ١ + ١)^{٥} = ٣^{٥} = ٢٤٣$

إذا كان : $(١ - حـ س)^{ن} = ١ - أ_{١} س + أ_{٢} س^{٢} - أ_{٣} س^{٣} + \ldots\ldots$

وكان : $أ_{١} = ٦٠$ ، $٥٠ أ_{٢} - ٣ أ_{٣} = ٠$ ، فأوجد قيمة $حـ$ ، $ن$.

الحل

$(١ - حـ س)^{ن} = ١ - ن_{ق_{١}} حـ س + ن_{ق_{٢}} حـ^{٢} س^{٢} - ن_{ق_{٣}} حـ^{٣} س^{٣}$

بالمقارنة نجد أن : $أ_{١} = ن_{ق_{١}} حـ$ ، $أ_{٢} = ن_{ق_{٢}} حـ^{٢}$ ، $أ_{٣} = ن_{ق_{٣}} حـ^{٣}$

$\because أ_{١} = ٦٠ \quad \therefore ن_{ق_{١}} حـ = ٦٠ \quad \therefore ن حـ = ٦٠ \quad \ldots\ldots ①$

$\because ٥٠ أ_{٢} - ٣ أ_{٣} = ٠ \quad \therefore ٥٠ \times ن_{ق_{٢}} حـ^{٢} - ٣ \times ن_{ق_{٣}} حـ^{٣} = ٠$

بقسمة طرفي المعادلة على : $ن_{ق_{٢}} حـ^{٢}$

$\therefore ٥٠ - ٣ \times \frac{ن_{ق_{٣}}}{ن_{ق_{٢}}} \times حـ = ٠ \quad \therefore ٥٠ - ٣ \times \frac{ن - ٢}{٣} \times حـ = ٠$

$\therefore ٥٠ - ن حـ + ٢ حـ = ٠ \quad \ldots\ldots ②$

من ① ، ② :

$\therefore ٢ حـ = ١٠ \quad \therefore حـ = ٥$

من ① : $٥ ن = ٦٠ \quad \therefore ن = ١٢$

فى مفكوك $(\frac{س^{٣}}{٢} - \frac{٤}{س})^{١١}$ حسب قوى س التنازلية ، أوجد :

(أولاً) قيمة معامل $س^{٥}$

(ثانيًا) قيمة س التى تجعل مجموع الحدين الأوسطين مساويًا للصفر .

الحل

(أولاً) $\because ع_{ر+١} = {}^{ن}و_{ر} (\text{الثانى})^{ر} (\text{الأول})^{ن-ر}$

$\therefore ع_{ر+١} = {}^{١١}و_{ر} (-\frac{٤}{س})^{ر} (\frac{س^{٣}}{٢})^{١١-ر}$

$\therefore ع_{ر+١} = {}^{١١}و_{ر} (-٤)^{ر} \times (\frac{١}{٢})^{١١-ر} \times س^{٣٣-٤ر}$

$\because س^{٥} = س^{٣٣-٤ر}$ $\therefore ٤ر = ٢٨$ $\therefore ر = ٧$

قيمة معامل $س^{٥}$ = معامل $ع_{٨}$

$\therefore$ معامل $س^{٥} = {}^{١١}و_{٧} (-٤)^{٧} \times (\frac{١}{٢})^{٤} = -{}^{١١}و_{٤} \times ٢^{١٠}$

$= -٣٣٠ \times ٢^{١٠} = -٣٣٧٩٢٠$

(ثانيًا) $\because ن = ١١$ $\therefore$ عدد حدود المفكوك = ١٢

ترتيب الحدين الأوسطين = $\frac{١١+١}{٢}$ ، $\frac{١١+٣}{٢}$

الحدان الأوسطان هما : $ع_{٦}$ ، $ع_{٧}$

$\because ع_{٧} + ع_{٦} = ٠$ $\therefore ع_{٧} = -ع_{٦}$

$\because \frac{ع_{ر+١}}{ع_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{\text{الثانى}}{\text{الأول}}$

$\because \frac{ع_{٧}}{ع_{٦}} = -١$ $\therefore \frac{١١-٦+١}{٦} \times \frac{٨-}{س^{٤}} = -١$

$\therefore \frac{ع_{٧}}{ع_{٦}} = -١$ $\therefore \frac{١١-٦+١}{٦} \times \frac{٨-}{س^{٤}} = -١$

$\therefore س^{٤} = ٨$ $\therefore س = \pm \sqrt[٤]{٨}$

فى مفكوك $(س^{ك} + \frac{١}{س})^{٦}$ حيث ك عدد صحيح موجب ، أوجد :

(أولاً) قيم ك التى تجعل للمفكوك حدًا خاليًا من س .

(ثانيًا) النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل الحد الأوسط وذلك لأكبر قيم ك التى حصلت عليها فى أولاً .

الحل

(أولاً) $\because ع_{ر+١} = {}^{ن}و_{ر} (\text{الثانى})^{ر} (\text{الأول})^{ن-ر}$

$\therefore ع_{ر+١} = {}^{٦}و_{ر} (\frac{١}{س})^{ر} \times (س^{ك})^{٦-ر} = {}^{٦}و_{ر}\ س^{٦ك - ك ر - ر}$

$\because س^{٠} = س^{٦ك - ك ر - ر}$ $\therefore ٦ك = ك ر + ر$ $\therefore ر = \frac{٦ك}{ك+١}$

عندما : ك = ١ $\therefore ر = \frac{٦}{٢} = ٣$

عندما : ك = ٢ $\therefore ر = \frac{١٢}{٣} = ٤$

عندما : ك = ٥ $\therefore ر = \frac{٣٠}{٦} = ٥$

$\therefore$ قيم ك هى : ١ ، ٢ ، ٥

(ثانيًا) $\because ن = ٦$ $\therefore$ عدد حدود المفكوك = ٧

ترتيب الحد الأوسط $= \frac{٦}{٢} + ١ = ٤$

الحد الأوسط هو : $ع_{٤}$ ، الحد الخالى من س لأكبر قيم ك هو $ع_{٦}$

$\because \frac{\text{معامل } ع_{ر+١}}{\text{معامل } ع_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{معامل الثانى}}{\text{معامل الأول}}$

$\therefore \frac{\text{معامل } ع_{٦}}{\text{معامل } ع_{٤}} = \frac{\text{معامل } ع_{٦}}{\text{معامل } ع_{٥}} \times \frac{\text{معامل } ع_{٥}}{\text{معامل } ع_{٤}}$

$\therefore \frac{\text{معامل } ع_{٦}}{\text{معامل } ع_{٤}} = \frac{٦ - ٥ + ١}{٥} \times \frac{٦ - ٤ + ١}{٤} = \frac{٢}{٥} \times \frac{٣}{٤} = ٣ : ١٠$

فى مفكوك (س + ص)^{ن} إذا كان : أ هو مجموع الحدود الفردية الرتبة ، ب هو مجموع الحدود الزوجية الرتبة فأثبت أن :

(أولًا) أ^{٢} − ب^{٢} = (س^{٢} − ص^{٢})^{ن}

(ثانيًا) ٤ أ ب = (س + ص)$^{٢ ن}$ − (س − ص)$^{٢ ن}$

الحل

(أولاً) ∵ أ هو مجموع الحدود الفردية الرتبة ، ب هو مجموع الحدود الزوجية الرتبة .

∴ أ + ب = (س + ص)^{ن} ..... ① ، أ − ب = (س − ص)^{ن} ..... ②

من ① ، ②

∴ (أ + ب) (أ − ب) = (س + ص)^{ن} (س − ص)^{ن}

∴ أ^{٢} − ب^{٢} = ((س + ص) (س − ص))^{ن} = (س^{٢} − ص^{٢})^{ن}

(ثانيًا) ∵ (س+ص)$^{٢ ن}$ −(س−ص)$^{٢ ن}$ = ((س + ص)^{ن})^{٢} − ((س − ص)^{ن})^{٢}

= (أ + ب)^{٢} − (أ − ب)^{٢}

= أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢} − (أ^{٢} − ٢ أ ب + ب^{٢})

= ٤ أ ب

باستخدام نظرية ذات الحدين أثبت أن : : ٣$^{٢ ن}$ − ٨ ن − ١

تقبل القسمة على ٦٤

الحل

∵ ٣$^{٢ ن}$ − ٨ ن − ١ = (٣^{٢})^{ن} − ٨ ن − ١ = ٩^{ن} − ٨ ن − ١

∴ ٣$^{٢ ن}$ − ٨ ن − ١ = (١ + ٨)^{ن} − ٨ ن − ١

= ١ + ن$_{ق_{١}}$ × ٨ + ن$_{ق_{٢}}$ × (٨)^{٢} + ن$_{ق_{٣}}$ × (٨)^{٣} + ... − ٨ ن − ١

= ن$_{ق_{٢}}$ × ٦٤ + ن$_{ق_{٣}}$ × ٦٤ × ٨ + ...

= ٦٤ (ن$_{ق_{٢}}$ + ن$_{ق_{٣}}$ × ٨ + ...)

∴ ٣$^{٢ ن}$ − ٨ ن − ١ تقبل القسمة على ٦٤

إذا كان : ٢ ع$_{٥}$ = ع$_{٤}$ + ع$_{٦}$ فى مفكوك (س + ص)^{٨} فأوجد قيمة : $\frac{س}{ص}$

الحل

∵ ٢ ع$_{٥}$ = ع$_{٤}$ + ع$_{٦}$

∴ ٢ $ق_{٨}^{٤}$ ص^{٤} س^{٤} = $ق_{٨}^{٣}$ ص^{٣} س^{٥} + $ق_{٨}^{٥}$ ص^{٥} س^{٣}

بقسمة طرفى المعادلة على $ق_{٨}^{٤}$ س^{٤} ص^{٤}

∴ ٢ = $\frac{ق_{٨}^{٣}}{ق_{٨}^{٤}} \times \frac{س}{ص} + \frac{ق_{٨}^{٥}}{ق_{٨}^{٤}} \times \frac{ص}{س}$

∴ ٢ = $\frac{٤}{٨ - ٣} \times \frac{س}{ص} + \frac{٨ - ٤}{٥} \times \frac{ص}{س}$

∴ ٢ = $\frac{٤}{٥} \times \frac{س}{ص} + \frac{٤}{٥} \times \frac{ص}{س}$ بضرب طرفى المعادلة × ٥ س ص

∴ ١٠ س ص = ٤ س^{٢} + ٤ ص^{٢} (÷ ٢)

∴ ٢ س^{٢} − ٥ س ص + ٢ ص^{٢} = ٠

∴ (٢ س − ص) (س − ٢ ص) = ٠

∴ $\frac{س}{ص} = \frac{١}{٢}$ أو $\frac{س}{ص}$ = ٢

أخذت ٣ حدود متتالية فى مفكوك (١ + س)^{٣٠} فوجد أن نسبة مجموع معاملى الحدين الأول والثانى من هذه الحدود إلى مجموع معاملى الحدين الثانى والثالث منها كنسبة ٥ : ٣ فما هذه الحدود ؟

الحل

بفرض أن الحدود هى : $ح_ر$ ، $ح_{ر+١}$ ، $ح_{ر+٢}$

معامـــل $ح_ر$ + معامل $ح_{ر+١}$ = $^{٣٠}و_{ر-١}$ + $^{٣٠}و_ر$ = $^{٣١}و_ر$

معامل $ح_{ر+١}$ + معامل $ح_{ر+٢}$ = $^{٣٠}و_ر$ + $^{٣٠}و_{ر+١}$ = $^{٣١}و_{ر+١}$

$\therefore \frac{^{٣١}و_{ر+١}}{^{٣١}و_ر} = \frac{٣}{٥}$ $\quad\quad$ $\therefore \frac{٣١-ر}{١+ر} = \frac{٣}{٥}$

$\therefore ٥(٣١-ر) = ٣(ر+١)$ $\quad\quad$ $\therefore ١٥٥ - ٥ر = ٣ر + ٣$

$\therefore ٨ر = ١٥٢$ $\quad\quad$ $\therefore ر = ١٩$

$\therefore$ الحدود هى : $ح_{١٩}$ ، $ح_{٢٠}$ ، $ح_{٢١}$

أثبت أن : معامل الحد الذى يشتمل على س^{٣} ص^{٤} ع^{٥} فى مفكوك

(س + ص + ع)^{١٢} هو $\frac{\lfloor ١٢}{\lfloor ٥ \lfloor ٤ \lfloor ٣}$

الحل

فى مفكوك (س + (ص + ع))^{١٢}

$\because ح_{ر+١} = ^{١٢}و_ر (ص+ع))^{ر} \times س^{١٢-ر}$

$\because س^{٣} = س^{١٢-ر}$ $\quad\quad$ $\therefore ر = ٩$ $\quad\quad$ $\therefore ح_{١٠} = ^{١٢}و_{٩}$ س^{٣} (ص + ع)^{٩}

فى مفكوك (س + ع)^{٩}

$\because ح_{ر+١} = ^{٩}و_ر$ ع^{ر} × ص$^{٩-ر}$ $\quad\quad$ $\because$ ص^{٤} = ص$^{٩-ر}$ $\quad\quad$ $\therefore ر = ٥$

$\therefore ح_{٦} = ^{٩}و_{٥}$ ع^{٥} ص^{٤}

$\therefore$ معامل الحد الذى يشتمل على س^{٣} ص^{٤} ع^{٥} = $^{١٢}و_{٩} \times ^{٩}و_{٥}$

$= \frac{\lfloor ١٢}{\lfloor ٩ \lfloor ١٢-٩} \times \frac{\lfloor ٩}{\lfloor ٥ \lfloor ٩-٥} = \frac{\lfloor ١٢}{\lfloor ٥ \lfloor ٤ \lfloor ٣}$

أوجد عدد الحدود التى قيمتها أعداد صحيحة فى مفكوك ($\sqrt[3]{}$ + $\sqrt[4]{}$)^{124}

الحل

$$(\sqrt[3]{} + \sqrt[4]{})^{124} = (\sqrt[3]{})^{124} + \text{و}_1 (\sqrt[3]{})^{123} (\sqrt[4]{}) + \text{و}_2 (\sqrt[3]{})^{122} (\sqrt[4]{})^2 + \text{و}_3 (\sqrt[3]{})^{121} (\sqrt[4]{})^3 + \text{و}_4 (\sqrt[3]{})^{120} (\sqrt[4]{})^4 + \cdots\cdots$$

الحدود هى : ع$_1$ ، ع$_5$ ، ع$_9$ ، ..... إلى ع$_{125}$

١ ، ٥ ، ٩ ، ..... ، ١٢٥ حدود متتابعة حسابية .

∵ أ = ١ ، ء = ٤ ، ل = ١٢٥

∵ ل = أ + (ح − ١) ء ∴ ١٢٥ = ١ + (ح − ١) × ٤

∴ ح − ١ = $\frac{124}{4}$ = ٣١ ∴ ح = ٣٢ حداً .

فى مفكوك (١ + س)^{ح} إذا كان : ٥ (ع$_6$)^2 = ١٨ ع$_4$ × ع$_8$

فأوجد قيمة ح .

الحل

∵ ٥ (ع$_6$)^2 = ١٨ ع$_4$ × ع$_8$

∴ $\frac{5}{18} = \frac{ع_4}{ع_6} \times \frac{ع_8}{ع_6} = \frac{ع_4}{ع_5} \times \frac{ع_5}{ع_6} \times \frac{ع_8}{ع_7} \times \frac{ع_7}{ع_6}$

∴ $\frac{5}{18} = \frac{4}{ح - 4 + 1} \times \frac{5}{ح - 5 + 1} \times \frac{1}{س^2} \times \frac{ح - 7 + 1}{7} \times \frac{ح - 6 + 1}{6} \times س^2$

∴ $\frac{5}{18} = \frac{20}{(ح - 3)(ح - 4)} \times \frac{(ح - 6)(ح - 5)}{42}$

∴ $\frac{7}{12} = \frac{ح^2 - 11ح + 30}{ح^2 - 7ح + 12}$

∴ ١٢ ح^2 − ١٢ × ١١ ح + ٣٦٠ = ٧ ح^2 − ٤٩ ح + ٨٤

∴ ٥ ح^2 − ٨٣ ح + ٢٧٦ = ٠ ∴ (٥ ح − ٢٣) (ح − ١٢) = ٠

∴ ٥ ح − ٢٣ = ٠ ∴ ح = $\frac{23}{5}$ (مرفوض)

أو ح − ١٢ = ٠ ∴ ح = ١٢

فى مفكوك $(٢ س + \frac{٣}{س^{٢}})^{ح}$ حسب قوى س التنازلية كان الحدان التاسع والعاشر متساويين والنسبة بين الحد السادس والسابع كنسبة ٨ : ١٥

فأوجد قيمة ح ، وأثبت أنه لا يوجد حد خال من س فى هذا المفكوك . [دور ثان ٢٠١١]

$\because \frac{ع_{١٠}}{ع_{٩}} = ١$

$\therefore \frac{ح - ٩ + ١}{٩} \times \frac{٣}{٢ س^{٣}} = ١$

$\therefore (ح - ٨) = ٦ س^{٣}$ ..... ①

$\because \frac{ع_{٧}}{ع_{٦}} = \frac{١٥}{٨}$

$\therefore \frac{ح - ٦ + ١}{٦} \times \frac{٣}{٢ س^{٣}} = \frac{١٥}{٨}$

$٢ (ح - ٥) = ١٥ س^{٣}$ ..... ②

بقسمة ① على ②

$\frac{ح - ٨}{٢ (ح - ٥)} = \frac{٦}{١٥}$

$٥ (ح - ٨) = ٤ (ح - ٥)$ $\therefore$ $\boxed{ح = ٢٠}$

$\because ع_{ر+١} = {}^{٢٠}ق_{ر} \left(\frac{٣}{س^{٢}} \right)^{ر} (٢ س)^{٢٠-ر}$

$\because س^{٠} = س^{٢٠-٣ر}$

$\therefore ر = \frac{٢٠}{٣} \notin ص^{+}$

$\therefore$ لا يوجد حد خال من س فى هذا المفكوك .

إذا كانت الحدود الثانى والثالث والرابع فى مفكوك (س + ص)^{ن} حسب قوى س التنازلية هى على الترتيب ٢٤٠ ، ٧٢٠ ، ١٠٨٠ فما قيمة كل من س ، ص ، ن ؟

$\therefore \frac{ع_{٣}}{ع_{٢}} = \frac{ن - ٢ + ١}{٢} \times \frac{ص}{س} = \frac{٧٢٠}{٢٤٠} = ٣$

$\therefore (ن - ١) ص = ٦ س$ ..... ①

$\therefore \frac{ع_{٤}}{ع_{٣}} = \frac{ن - ٣ + ١}{٣} \times \frac{ص}{س} = \frac{١٠٨٠}{٧٢٠} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore ٢ (ن - ٢) ص = ٩ س$ ..... ②

بقسمة ① على ②

$\therefore \frac{ن - ١}{٢ (ن - ٢)} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore ٣ ن - ٣ = ٤ ن - ٨$ $\therefore$ $\boxed{ن = ٥}$

من ① $٤ ص = ٦ س$ $\therefore ص = \frac{٣}{٢} س$

$\because ع_{٢} = {}^{٥}ق_{١} ص س^{٤} = ٢٤٠$

$\therefore \frac{٣}{٢} س^{٥} = ٤٨$ $\therefore س = ٢ ، ص = ٣$

فى مفكوك ($س^{٣} + \frac{١}{س}$)^{١٧} حسب قوى س التنازلية :

(أولًا) أثبت أنه لا يوجد حد خال من س .

(ثانيًا) إذا كان الحدان الأوسطان متساويين ، فأوجد قيمة س .

(أولًا) $\because ع_{ر+١} =$

$^{١٧}ق_{ر} (س)^{-ر} \times (س^{٣})^{١٧-ر}$

$\therefore س^{٠} = س^{٥١ - ٤ ر}$

$\because ر = \frac{٥١}{٤} \notin ص^{+}$

$\therefore$ لا يوجد حد خالٍ من س فى هذا المفكوك .

(ثانيًا) $\because ن = ١٧$

$\therefore$ عدد حدود المفكوك = ١٨

$\therefore$ الحدان الأوسطان هما : $ع_{٩}$ ، $ع_{١٠}$

$\because \frac{ع_{١٠}}{ع_{٩}} = ١$ $\therefore \frac{١٧ - ٩ + ١}{٩} \times \frac{١}{س^{٤}} = ١$

$\therefore س^{٤} = ١$ $\therefore س = \pm ١$

فى مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{٨ س})^{١٣}$ حسب قوى س التنازلية :

(أولًا) أثبت أنه لا يوجد حد يشتمل على س .

(ثانيًا) إذا كان الحدان الرابع والحادى عشر متساويين ، فأوجد قيمة س

(أولًا) ∵ $ع_{ر+١} =$

$$^{١٣}و_{ر} \left(\frac{١}{٨ س}\right)^{ر} (س^{٢})^{١٣-ر}$$

$$∵ س^{٠} = س^{٢٦-٣ر}$$

$$∴ ر = \frac{٢٦}{٣} \notin ص^{+}$$

∴ لا يوجد حد خال من س فى هذا المفكوك .

(ثانيًا) ∵ $ع_{٤} = ع_{١١}$

$$∴ {}^{١٣}و_{٣} \left(\frac{١}{٨ س}\right)^{٣} (س^{٢})^{١٠}$$

$$= {}^{١٣}و_{١٠} \left(\frac{١}{٨ س}\right)^{١٠} (س^{٢})^{٣}$$

$$∴ (س^{٢})^{٧} = \left(\frac{١}{٨ س}\right)^{٧}$$

$$∴ س^{٢} = \frac{١}{٨ س} \qquad ∴ س^{٣} = \frac{١}{٨}$$

$$∴ س = \frac{١}{٢}$$

فى مفكوك $(س - \frac{١}{س^{٢}})^{٩}$ ، أوجد :

(أولًا) قيمة الحد الخالى من س .

(ثانيًا) قيمة س التى تجعل مجموع الحدين الأوسطين فى المفكوك مساويًا الصفر .

(أولًا) $\because ع_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} (\frac{-١}{س^{٢}})^{ر} \times س^{٩-ر}$

$\because س^{٠} = س^{٩-٣ر}$ $\boxed{ر = ٣}$

الحد الخالى من س هو $ع_{٤}$

$\therefore ع_{٤} = {}^{٩}ق_{٣} (- ١)^{٣} = - ٨٤$

(ثانيًا) $\because ن = ٩$

$\therefore$ عدد حدود المفكوك = ١٠

الحدان الأوسطان هما $ع_{٥}$ ، $ع_{٦}$

$\because ع_{٦} + ع_{٥} = ٠$ $\therefore ع_{٦} = - ع_{٥}$

$\therefore \frac{ع_{٦}}{ع_{٥}} = - ١$

$\therefore \frac{٩ - ٥ + ١}{٥} \times \frac{-١}{س^{٣}} = - ١$

$\therefore س^{٣} = ١$ $\therefore$ $\boxed{س = ١}$

فى مفكوك $(\frac{1}{س} + س^{2})^{15}$ حسب قوى س التصاعدية أوجد :

(أولًا) قيمة الحد الخالى من س

(ثانيًا) قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين متساويين .

(أولًا) $\because ع_{ر+1} =$

$$ق_{ر}^{15} (س^{2})^{ر} (س)^{-ر-5}$$

$\because س^{0} = س^{3ر-15}$ $\therefore 3ر - 15 = 0$

$\therefore ر = 5$

$\therefore$ الحد الخالى من س هو $ع_{6}$

$$ع_{6} = ق_{5}^{15} = 3003$$

(ثانيًا) $\because ن = 15$

$\therefore$ عدد حدود المفكوك = 16

$\therefore$ الحدان الأوسطان هما $ع_{8}$ ، $ع_{9}$

$\because \frac{ع_{9}}{ع_{8}} = 1$ $\therefore \frac{15-8+1}{8} \times س^{3} = 1$

$\therefore س^{3} = 1$ $\therefore$ $\boxed{س = 1}$